Notions de Logique
par : Mr. Ali TAMOUSSIT

Exercice 1 :
Montrer que si $r \in \mathbf{Q}$ et $x \notin \mathbf{Q}$ alors $x + r \notin \mathbf{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 2:
Montrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

Exercice 3:
Soient a et b deux réels. Montrer que :
$(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2) \ (\quad ax + by = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ et \ b = 0 \quad)$.

Exercice 4:
Soient $a, b, c \ et \ d$ quatre réels vérifiant : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$.
Montrer que : $a = b = c = d$.

Exercice 5:
Soient a et b deux entiers relatifs.
Montrer que : $\quad a < b \quad \Rightarrow \quad a \leq b - 1$.

Exercice 6:
Soient a et b deux réels.
Montrer que : $a + b < 2 + a^2 + b^2$.

Exercice 7:
Soient a et b deux réels. Montrer :
$(\forall \varepsilon > 0, \quad a \leq b + \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$.

Exercice 8:
Soient a et b deux réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $x > b$, on ait $a \leq x$.
Montrer que : $a \leq b$.

Exercice 9:
Soient $a, b \ et \ c$ trois réels.
Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Exercice 10:
Soient $a, b \ et \ c$ trois réels tels que : $0 \leq a \leq b \ et \ 0 < c$.
Montrer que : $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{c}.(b - a) + c$.

Exercice 11:
Soient $a, b \ et \ c$ trois réels tels que : $3.a^2 = 2.(c^2 - b^2)$.
Montrer que : $|c| \geq \sup(|a|, |b|)$.

Exercice 12:
Soient $a, b \ et \ c$ trois réels strictement positifs.
Montrer que : $a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad (a^6 + b^6 - c^6)^3 + 27a^6b^6c^6 = 0$.

Exercice 13:

Soient a, b et c trois réels.

1. Montrer que si $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$, alors $|a| < c$ et $|b| < c$.
2. Montrer que : $|a+b| = |a| + |b|$ si et seulement si $ab \geq 0$.
3. Montrer que : $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b-a}{2} \geq 0$ ou $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \geq 0$.
4. Déduire que : si $|a| < c$ et $|b| < c$, alors $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$.

Exercice 14:

Soinet $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, a et b deux réels strictement positifs tel que : $a < b$.
Montrer que : $n(b-a)a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n(b-a)b^{n-1}$.

Exercice 15:

Soient a, b, c et d quatre réels vérifiant : $a \leq b$ et $c \leq d$ et $a + c = b + d$.

Montrer que : $a = b$ et $c = d$.

Exercice 16:

Soit a un réel.
Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

Exercice 17:

Soit a un réel compris entre 0 et π.
Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité : $|\sin(na)| \leq n\sin(a)$.

Exercice 18:

Soit n un entier ≥ 2.

Montrer que : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.

Exercice 19:

Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 20:

Soient n un entier naturel non nul et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2} = n$.

Montrer que : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_k = 1$.

Exercice 21:

Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$.
Montrer que tout élément x de I s'écrit sous la forme
$x = \alpha.a + (1-\alpha).b$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

Exercice 22:

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b \; et \; a+b>0$ et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ où n est un entier naturel non nul.

Montrer que : $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}{n(a+b)}$.

Exercice 23:

Soient $a, b \; et \; \theta$ trois réels.

Montrer que : $(a\cos(\theta) + b\sin(\theta))^2 \leq a^2 + b^2$.

Exercice 24:

Soient $a, b \; et \; c$ trois réels strictement positifs.

On pose : $\alpha = a + \dfrac{1}{b}$, $\beta = b + \dfrac{1}{c} \; et \; \gamma = c + \dfrac{1}{a}$.

Montrer que : $\max(\alpha, \beta, \gamma) \geq 2$.

Exercice 25:

1. Etablir : $\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
2. En déduire : $\forall a,b,c \in [0,1], \quad \min(a(1-b), b(1-c), c(1-a)) \leq \dfrac{1}{4}$.

Exercice 26:

1. Soit n un entier naturel non nul , montrer que :
   $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
2. En déduire la partie entière de : $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 27:

Soient n un entier relatif et x un nombre réel.

1. Montrer que : $E(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbf{Z}$.
2. Montrer que : $E(x+n) = E(x) + n$.

Exercice 28:

Soient $x \; et \; y$ deux réels , montrer que :

1. $x \leq y \quad \Rightarrow \quad E(x) \leq E(y)$.
2. $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

Exercice 29:

Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel.

1. Montrer que : $E\left(\dfrac{E(n.x)}{n}\right) = E(x)$.
2. Déduire que : $E\left(\dfrac{E(x)}{n}\right) = E\left(\dfrac{x}{n}\right)$.