Calcul mental

En utilisant les identités remarquables, sans utiliser la calculatrice et sans poser l'opération, calculer :

101^2	101×99
99^2	$1000000001^2-1000000000^2$

Quelques méthodes de factorisation

** Pour factoriser une expression, on peut chercher un facteur commun. Cela peut être un nombre, une lettre remplaçant un nombre, une expression.

Exemples :

$\mathbf{A}=21x+15$; $\mathbf{B}=4(x+2)x+4x(3x+5)$;

$\mathbf{C}=(x+5)(2x+5)+(2x+5)(3x-8)$

Attention à quelques cas :

- *la soustraction :*
  $\mathbf{D}=3(5x-2)-3(2x-7)$;
- *le terme « sans facteur » :*
  $\mathbf{E}=(3x+7)(x+5)+3x+7$;
- *le carré :*
  $\mathbf{F}=(x+3)^2+(2x+5)(x+3)$;
- *Parfois le facteur commun est plus difficile à voir :*
  $\mathbf{G}=12x^2-27+(2x+3)(x-1)$.

**On peut aussi utiliser les identités remarquables.

Exemples :

$\mathbf{H}=25x^2+30x+9$; $\mathbf{I}=x^2-8x+16$;

$\mathbf{J}=(x+5)^2-4$; $\mathbf{K}=(2x-1)^2-(3x+5)^2$

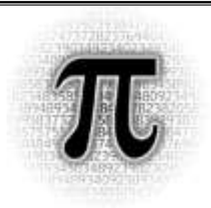
Astuce : « le début d'une identité remarquable »

$$\left.\begin{array}{l} x^2+ax=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \boxed{\text{à vérifier}}$$

Exemple : $\mathbf{L}=x^2-6x+8$.

Abréviation utile

CQFD est l'abréviation de ***« ce qu'il fallait démontrer ».*** Elle se place à la fin d'une démonstration mathématique pour indiquer que le résultat attendu a été démontré.



EXERCICE 1 : ***Vrai ou faux ?***

Pour chaque affirmation, dites si elles sont vraies ou fausses, et **justifier les réponses par des CALCULS**.

- $-x$ est toujours négatif.
- x^2 est toujours égal à $2x$.
- $(5x)^2$ est toujours égal à $5x^2$.
- $8x-3$ est toujours égal à $5x$.
- $18x$ est toujours égal à $2\times x\times 9$.
- $2x^2+9x$ est toujours égal à $11x^3$.

EXERCICE 2: ***Calculatrice digitale***

Pour calculer 6×8, Ahmed a vu son professeur de mathématiques opérer de la façon suivante.

- Pour faire 6, avec la main droite je lève 1 doigt.
- Pour faire 8, avec la main gauche je lève 3 doigts.
- J'additionne les doigts levés des deux mains : 1+3=4.
- Je multiplie le nombre de doigts baissés à droite par le nombre de doigts baissés à gauche : $4\times2=8$.
- Le résultat est 48.

1. Vérifier que cette astuce fonctionne pour 7×9 et pour 6×6 (l'éventuelle retenue de la multiplication s'ajoute à la somme des doigts levés).
2. Démontre cette méthode de calcul de $a\times b$ avec les doigts pou a et b compris entre 5 et 9.

EXERCICE 3 :

On considère l'expression :

$$\mathbf{A}=(2x-5)(3x+7)-(4x^2-20x+25).$$

1. Développer, réduire et ordonner $\mathbf{A}$.
2. Factoriser $\mathbf{A}$.
3. Calculer $\mathbf{A}$ pour $x=1$ en utilisant :
   a. l'énoncé,
   b. l'écriture développée,
   c. l'écriture factorisée.
4. En choisissant l'écriture la plus appropriée, calculer $\mathbf{A}$ pour $x=-3$.

EXERCICE 4 : ***Impossible?***

Calculer

$$34356786456\times34356786447-34356786451^2.$$

EXERCICE 5 : ***Arithmétique***

Un entier relatif étant choisi, démontre la propriété suivante :

« le produit da l'entier qui le précède par l'entier qui le suit, augmenté de 1est le carré de cet entier ».

EXERCICE 6 : ***Comparaison***

Fouzia affirme qu'elle peut comparer les quotients $\frac{999999}{1000000}$ et $\frac{1000000}{1000001}$ ***sans utiliser de calculatrice et sans poser de multiplication***.

Que pensez-vous ?

EXERCICE 7 :

On considère l'expression :

$$\mathbf{E} = (x-3)^2 - (x-1)(x-2).$$

1. Développer et réduire $\mathbf{E}$.
2. Comment peut-on déduire, sans calculatrice le résultat de $99997^2 - 99999 \times 99998$.

EXERCICE 8 :

n désigne un nombre entier naturel non nul.

On pose : $\mathbf{P} = (3n+1)^2 + 16n^2 - 26n + 3$.

1. Développer et réduire $\mathbf{P}$.
2. Montrer que $\mathbf{P}$ est un carré parfait.

Pour aller plus loin

Calcul impossible ?

1. *Démontre que tout entier impaire peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs.*
2. *Calculer la somme :*
   $1+3+5+7+...+2007+2009+2011.$

http://4maths.jimdo.com