

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1	
الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.	
نعتبر الفلكة $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 6 = 0$ و المستوى $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ و النقطة $A(4, 1, 3)$	
(1) تحقق أن النقطة A تنتمي لكل من (S) و (P) .	0.25
(2) بين أن مركز (S) هو $\Omega(2, -1, 1)$ و شعاعها $R = \sqrt{12}$.	0.5
(3) أ) بين أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C) محدداً شعاعها (تحديد المركز غير مطلوب). ب) نعتبر نقطة $N(a, b, c)$ من الدائرة (C) بين أن: $a^2 + b^2 + c^2 = 26$.	0.5
(4) أ) حدد متجهة \vec{n} منظمية على (P) ثم حدد إحداثيات المتجهة: $\vec{n} \wedge \overrightarrow{\Omega A}$. ب) نعتبر المستوى (R) المماس ل (S) في A ، استنتج تمثيل بارمترى للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (R) .	0.5+0.25
	0.5

يحتوي صندوق على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 4

و على أربع كرات خضراء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 4.

كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس، السؤالان (1) و (2) مستقلان فيما بينهما.

(1) نسحب عشوائياً بنتابع و بإحلال ثلاث كرات، نعتبر الأحداث: A "الكرات الثلاث تحمل نفس اللون"

B "الكرات الثلاث تحمل الرقم 2" C "الكرات الثلاث تحمل أرقام مختلفة مثني مثني".

أحسب $p(A)$ و $p(B)$ و $p(B/A)$ و $p(C)$.

(2) نسحب عشوائياً بنتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق.

نعتبر X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات البيضاء المسحوبة الحاملة لرقم زوجي، حدد قانون احتمال X .

التمرين 2

التمرين 3

(I) (1) أدرس رتبة الدالة $h(x) = e^x - x - 1$ على \mathbb{R} .

(2) استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq e^x - 1$.

بالتوفيق

(II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = e^{-1} - 1$ و $u_{n+1} = \sqrt[3]{1+u_n} - 1$.

(1) أثبت بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq u_n \leq 0$.

(2) تحقق أن: $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{1+u_n} \cdot (1 - \sqrt[3]{(1+u_n)^2})$ و بين أن المتتالية (u_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة.

(3) نضع $v_n = \ln(1+u_n)$ ، بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية محدداً أساسها.

(4) أكتب v_n بدلالة n و استنتج أن: $u_n = e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^n} - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(5) أثبت مستعملاً السؤال (I) (2) أن: $\forall n \in \mathbb{N} : -\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq u_n \leq 0$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

التمرين 4

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألقاها على التوالي $a = 4i$ و $b = 2\sqrt{3} + 2i$ و $c = 2\sqrt{3} - 2i$ و $d = [4, \frac{5\pi}{6}]$

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

(2) تحقق أن: b^{12} عدد حقيقي موجب قطعاً.

(3) أ) بين أن: $d = 2i - 2\sqrt{3}$.

ب) تحقق أن: $c - d = 2(b - a)$ و أن $AD = BC$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(4) أ) حدّد قياساً للزاوية الموجهة (\vec{AO}, \vec{AB}) .

ب) حدّد التمثيل العقدي للدوران R الذي مركزه A و يحول O إلى B .

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$.

(1) أحسب $g'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

(2) استنتج أن: $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ يخالف 1.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x - 2 + \frac{4 + 3\ln x}{x}$

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ و أن: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن C_f يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه المستقيم $y = x$ بجوار $+\infty$.

(3) أ) تحقق أن $f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot [\frac{1}{2}x \ln x + \frac{4}{\ln x} + 3] + x - 2$. $\forall x > 0$

ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$ ثم أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

(4) أ) بين أن $\forall x > 0: f'(x) = \frac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}$.

ب) تحقق أن $(x-1)\ln x > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ يخالف 1.

ج) استنتج أن $f'(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ يخالف 1.

د) أحسب $f'(1)$ و ضع جدول التغيرات.

(5) أنشئ C_f ، نأخذ: $f(0,3) \approx 0$ و $f(4) \approx 5$.

الجزء الثالث: (1) أحسب التكاملين: $I = \int_1^e (x + \frac{4}{x} - 2) dx$ و $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

(2) أ) تحقق أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية ل $\ln x$ ثم استنتج $K = \int_1^e \ln x dx$.

ب) بين أن: $L = \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ مستعملاً مكاملة بالأجزاء.

(3) حدّد مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفصيل و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

بالتوفيق