

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.
- مدة إنجاز موضوع الامتحان: 3 ساعات.
- عدد الصفحات: 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات و الصفحتان الثانية و الثالثة تتضمنان تمارين الامتحان)
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه.
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة.
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه و لا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصة

يتكوّن الموضوع من أربعة تمارين و مسألة مستقلة فيما بينها و تتوزّع حسب المجالات التالية:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمال	2.75 نقطة
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	المعادلات التفاضلية و المكاملة بالأجزاء (سؤالان مستقلان)	1.75 نقطة
مسألة	دراسة دالة و المتتاليات العددية و حساب التكامل	9.5 نقطة

بالتوفيق

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

0.5

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(3, -2, 2)$ و $B(-1, 6, 4)$ و $C(5, 4, 4)$ و الفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

(1) تحقق أن المثلث ABC قائم الزاوية في C و استنتج أن $C \in (S)$.

(2) بين أن معادلة الفلكة (S) هي: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 21$.

(3) حدد معادلة المستوى (P) المماس ل (S) في C .

(4) أ) نعتبر المستقيم: $t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = t + 4 \\ y = 3 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$ ، بين أن مسافة Ω مركز الفلكة (S) عن المستقيم (Δ) هي: $\sqrt{11}$.

ب) حدد إحداثيات نقطتا تقاطع (Δ) و (S) .

(5) نعتبر المستوى $(L): x - 4y + 2z - d = 0$ ، حدد قيم d لكي يكون (L) مماساً ل (S) .

التمرين 2

يحتوي صندوق على خمس كرات خضراء تحمل الأرقام 0 و 1 و 2 و 2 و 2

و على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2.

كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس، السؤالان (1) و (2) مستقلان فيما بينهما.

(1) نسحب عشوائياً و في آن واحد كرتين:

أ) نعتبر X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع الرّقمين المحصّل عليهما، حدد قانون احتمال X .

ب) علماً أن الكرتين المسحوبتين تحملان الرّقم 1 أحسب احتمال أن يكون لونهما أبيض.

(2) نسحب كرة واحدة و نضعها جانباً ثمّ نسحب بتتابع و بإحلال كرتين، أحسب احتمال الحدث:

" E الحصول على كرتين خضراوين و كرة بيضاء ".

بالتوفيق

التمرين 3

0.5

0.25 + 0.5

0.5

0.25

0.5

0.5

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألقاها على التوالي $a = 2 - \sqrt{2}$ و $b = 3 - i$ و $c = 3 + i$ و $d = 2 + \sqrt{2}$.

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 6z + 10 = 0$.

(2) بين أن $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ثم استنتج أن: $\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^{20} = -1$.

(3) أ) بين أن: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 3 + 2\sqrt{2} - i - i\sqrt{2}$ هو التمثيل العقدي للدوران R الذي مركزه D و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب) تحقق أن صورة النّقطة C بالدوران R هي النّقطة B .

(4) استنتج أن النّقط A و B و C و D متداورة.

(5) حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|z-b| = |z-c|$.

التمرين 4

(أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها)

(1) حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{1}{5}y - 4$.

0.5

(2) تحقق أن: $\left(\ln\left(\frac{2x}{x+3}\right) \right)' = \frac{3}{x(x+3)}$ ثم بين مستعملاً مكاملة بالأجزاء أن: $\int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{\ln(2x)}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{7\sqrt{6}}{12}\right)$

1 + 0.25

مسألة

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية: $f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 6}{e^x + 1}$

(1) تحقق أن $D_f = \mathbb{R}$.

0.25

(2) أحسب $f(0)$ و تحقق أن: $f(\ln 2) = 2$.

0.5

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

0.5

(4) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن C_f يقبل فرعاً شلجماً في اتجاه محور الأرتايب بجوار $+\infty$.

0.75

بالتوفيق

(5) أ) بين أن: $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 4)(e^x - 2)}{(e^x + 1)^2}$ لكل x من \mathbb{R} .

0.75

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيرات. نأخذ: $\ln 2 \approx 0,7$.

0.75

(6) أنشئ C_f ، نقبل أن $I(-0,5 ; 3,2)$ نقطة انعطاف و أن $f(-2) \approx 5$ و أن $f(2) \approx 5,5$.

0.75

الجزء الثاني: نعتبر الدالة g قصور f على المجال $]-\infty, \ln 2]$.

(1) تحقق أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال $[2, 6[$.

0.25

(2) أ) نعتبر $x \in [2, 6[$ و $y \in]-\infty, \ln 2]$ ، بين أن: $f(y) = x \Leftrightarrow (x+2-2e^y)^2 = (x-2)(x+10)$.

0.5

ب) حدّد صيغة الدالة العكسية $g^{-1}(x)$.

0.5

الجزء الثالث: أحسب التكاملين: $I = \int_0^{\ln 2} (e^x - 3) dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$.

0.5+0.25

(2) أ) تحقق أن: $f(x) = e^x - 3 + \frac{9e^{-x}}{1+e^{-x}}$ لكل x من \mathbb{R} .

0.25

ب) حدّد مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

0.25

الجزء الرابع: نعتبر الدالة: $h(x) = f(\ln x)$ المعرفة على المجال $I = [2, e]$.

(1) حدّد باستعمال الدالتين f و $x \mapsto \ln x$ ، صورة I بالدالة h و استنتج أن: $h(I) \subset I$ ؛ نأخذ $f(1) \approx 2,3$.

0.5

(2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب: $U_0 = e$ و $U_{n+1} = h(U_n)$ لكل n من \mathbb{N} .

أ) بين بالترجع أن $U_n > 2$ لكل n من \mathbb{N} .

0.5

ب) تحقق أن $h(x) - x = \frac{6-3x}{x+1}$ لكل x من I و استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً.

0.5 + 0.5

ج) استنتج أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدّد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

0.5 + 0.25