فرض محروس (الحساب المثلثي-المتتاليات العددية)

التمرين 1: **(5.5 ن)**

لتكن $(u_n)_{n\in IN}$ المتتالية العددية المعرفة ب: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in IN): u_{n+1} = 4n - u_n \end{cases}$.

1. أحسب u_3 و u_4. — 0.25x2ن
2. بين أن المتتالية $(u_{2n})_{n\in IN}$ حسابية. — 1ن
3. استنتج u_{2n} ثم u_{2n+1} بدلالة n. — 0.5x2ن
4. لكل مدل n، نضع $v_n = u_n + 1 - 2n$.
   4.1. بدون استعمال نتيجتي السؤال السابق، حدد طبيعة المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$. — 1ن
   4.2. استنتج v_n ثم u_n بدلالة n. — 0.5x2ن
5. عبر عن المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n. — 1.5ن

التمرين 2: **(6.5 ن)**

نعتبر a عددا حقيقيا بحيث $a > 1$ و المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب: $\begin{cases} u_0 = a \\ (\forall n \in IN): u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$.

1. حدد قيم a التي تكون من أجلها $(u_n)_{n\in IN}$ متتالية ثابتة. — 0.5ن
2. نفترض أن $1 < a < 4$. — 1ن
   2.1. بين أن $(\forall n \in IN): 1 < u_n < 4$. — 1ن
   2.2. أستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$. — 1.5ن
3. أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ في حالة $a > 4$.
4. لكل مدل n، نضع $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$.
   4.1. حدد طبيعة المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$. — 1ن
   4.2. استنتج v_n ثم u_n بدلالة a و n. — 1.5ن

Groupe Scolaire El Azhari
Les Champions
Lycée Privé

التمرين 3: **(8 ن)**

لكل n عدد طبيعي صحيح، نضع : $u_n = \cos(n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$.

1. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ دورية. — 1 ن
2. نعتبر n من IN.
   2.1. أكتب u_n بدلالة $\cos(n\frac{\pi}{3})$ و $\sin(n\frac{\pi}{3})$. — 1ن
   2.2. عبر بصيغتين مختلفتين عن u_{n+1} بدلالة $\cos(n\frac{\pi}{3})$ و $\sin(n\frac{\pi}{3})$. — 1.5ن
   2.3. أستنتج قيمتي $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$ المضبوطتين. — 0.5ن
3. بين أنه، مهما يكن n من IN، لدينا: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ و $u_{n+3} = -u_n$. — 1ن+0.5ن
4. أستنتج مما سبق عناصر المجموعة : $U = \{u_n / n \in IN\}$. — 0.5ن
5. لكل مدل n، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   5.1. بين أن : $(\forall n \in IN): S_n = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - u_{n+2}$. — 1.5ن
   5.2. أستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in IN}$ دورية. — 0.5ن

بالتوفيق إن شاء الله...