التمرين 6:

نعتبر مجموعة E و $G \subset E$ و $H \subset E$ و مجموعات أجزائها على التوالي $\mathcal{P}(E)$ و $\mathcal{P}(G)$ و $\mathcal{P}(H)$.

1. بين أن $\mathcal{P}(G \cap H) = \mathcal{P}(G) \cap \mathcal{P}(H)$.

لدينا:

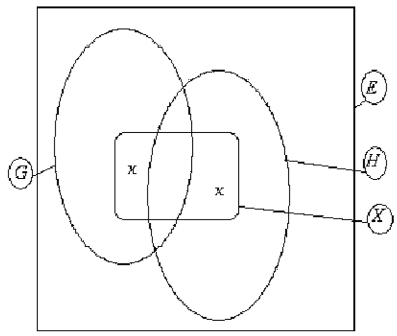
$$\begin{aligned}(\forall X \in \mathcal{P}(E)) : X \in \mathcal{P}(G \cap H) &\Leftrightarrow X \subset G \cap H \\ &\Leftrightarrow X \subset G \text{ و } X \subset H \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(G) \text{ و } X \in \mathcal{P}(H) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(G) \cap \mathcal{P}(H)\end{aligned}$$

إذن:

$$\mathcal{P}(G \cap H) = \mathcal{P}(G) \cap \mathcal{P}(H)$$

2. هل $\mathcal{P}(G \cup H) = \mathcal{P}(G) \cup \mathcal{P}(H)$ ؟ **لا.**

مثال مضاد: $X = \{1;2\},\ G = \{1\},\ H = \{2\}$.



لدينا: $X \in \mathcal{P}(G \cup H)$ و $X \notin \mathcal{P}(H)$ و $X \notin \mathcal{P}(G)$

إذن: $X \in \mathcal{P}(G \cup H)$ و $X \notin \mathcal{P}(G) \cup \mathcal{P}(H)$

و بالتالي: $\mathcal{P}(G \cup H) \neq \mathcal{P}(G) \cup \mathcal{P}(H)$

و مع ذلك نتحقق من أن $\mathcal{P}(G) \cup \mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(G \cup H)$

3. نعتبر أيضا مجموعة أخرى F. بين أن:

1) $(G \cup H)\text{x}F = (G\text{x}F) \cup (H\text{x}F)$

لدينا:

$$\begin{aligned}(x,y) \in (G \cup H)\text{x}F &\Leftrightarrow x \in (G \cup H) \text{ و } y \in F \\ &\Leftrightarrow (x \in G \text{ أو } x \in H) \text{ و } y \in F \\ &\Leftrightarrow (x \in G \text{ و } y \in F) \text{ أو } (x \in H \text{ و } y \in F) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in G\text{x}F \text{ أو } (x,y) \in H\text{x}F \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (G\text{x}F) \cup (H\text{x}F)\end{aligned}$$

و منه المتساوية $(G \cup H)\text{x}F = (G\text{x}F) \cup (H\text{x}F)$.

2) $(G \cap H)\text{x}F = (G\text{x}F) \cap (H\text{x}F)$

لدينا:

$$\begin{aligned}(x,y) \in (G \cap H)\text{x}F &\Leftrightarrow x \in (G \cap H) \text{ و } y \in F \\ &\Leftrightarrow (x \in G \text{ و } x \in H) \text{ و } y \in F \\ &\Leftrightarrow (x \in G \text{ و } y \in F) \text{ و } (x \in H \text{ و } y \in F) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in G\text{x}F \text{ و } (x,y) \in H\text{x}F \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (G\text{x}F) \cap (H\text{x}F)\end{aligned}$$

و منه المتساوية $(G \cap H)\text{x}F = (G\text{x}F) \cap (H\text{x}F)$.

3) $(G \setminus H)\text{x}F = (G\text{x}F) \setminus (H\text{x}F)$

لدينا:

$$\begin{aligned}(x,y) \in (G \setminus H)\,\text{x}F &\Leftrightarrow x \in (G \setminus H) \quad \text{و} \quad y \in F\\ &\Leftrightarrow (x \in G \quad \text{و} \quad x \notin H) \quad \text{و} \quad y \in F\\ &\Leftrightarrow (x \in G \ \text{و}\ y \in F\ ) \quad \text{و} \quad (x \notin H \ \text{و}\ y \in F)\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in G\text{x}F \quad \text{و} \quad (x,y) \notin H\text{x}F\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (G\text{x}F) \setminus (H\text{x}F)\end{aligned}$$

و منه المتساوية $(G \setminus H)\text{x}F = (G\text{x}F) \setminus (H\text{x}F)$.

التمرين8:

نعتبر المجموعات A و B و E المعرفة كما يلي :

$$E = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + 4y^2 + 2x - 8y = 31\}$$
$$(\forall x \in R) : x \in A \Leftrightarrow (\exists y \in R)/(x,y) \in E$$
$$(\forall y \in R) : y \in B \Leftrightarrow (\exists x \in R)/(x,y) \in E$$

1. تحقق من أن $E \neq \phi$.

لدينا: $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y = 31 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36$

نلاحظ أن $(5+1)^2 + 4(1-1)^2 = 36$ أي أن $(5,1) \in E$ إذن $E \neq \phi$.

2. استنتج أن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ مع تحديدهما على شكل مجال.

لدينا $(5,1) \in E$ إذن $5 \in A$ و $1 \in B$ أي $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$.

و لدينا:

$$\begin{aligned}(\forall x \in R) : x \in A &\Leftrightarrow (\exists y \in R)/(x,y) \in E\\ &\Leftrightarrow (\exists y \in R)/(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36\\ &\Leftrightarrow (\exists y \in R)/4(y-1)^2 = 36 - (x+1)^2\\ &\Leftrightarrow 36 - (x+1)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (6-(x+1))(6+(x+1)) \geq 0\\ &\Leftrightarrow (5-x)(x+7) \geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-5)(x+7) \leq 0\\ &\Leftrightarrow x \in [-7;5]\end{aligned}$$

أي: $A = [-7;5]$.

و لدينا أيضا:

$$\begin{aligned}(\forall y \in R) : y \in B &\Leftrightarrow (\exists x \in R)/(x,y) \in E\\ &\Leftrightarrow (\exists x \in R)/(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36\\ &\Leftrightarrow (\exists x \in R)/(x+1)^2 = 36 - 4(y-1)^2\\ &\Leftrightarrow 36 - 4(y-1)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow 9 - (y-1)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (3-y+1)(3+y-1) \geq 0\\ &\Leftrightarrow (4-y)(2+y) \geq 0\\ &\Leftrightarrow (y-4)(y+2) \leq 0\\ &\Leftrightarrow y \in [-2;4]\end{aligned}$$

أي : $B=[-2;4]$

3. بين أن $E \subset A \times B$ و أن $E \neq A \times B$.

لدينا:

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in E : (x+1)^2+4(y-1)^2=36 &\Rightarrow [\,(x+1)^2\le 36 \text{ و } 4(y-1)^2\le 36\,]\\
&\Rightarrow [\,|x+1|\le 6 \text{ و } |y-1|\le 3\,]\\
&\Rightarrow [-6\le x+1\le 6 \text{ و } -3\le y-1\le 3]\\
&\Rightarrow [-7\le x\le 5 \text{ و } -2\le y\le 4]\\
&\Rightarrow x\in A \text{ و } y\in B\\
&\Rightarrow (x,y)\in A\times B
\end{aligned}$$

إذن: $E \subset A \times B$.

لكن $A \times B \not\subset E$ لأن $5\in A$ و $4\in B$ مع $(5,4)\notin E$ (لأن $(5+1)^2+4(4-1)^2\neq 36$)

إذن: $E \neq A \times B$.

4. بين أن $(\forall (x,y)\in R^2) : (x,y)\in E \Leftrightarrow (-2-x,2-y)\in E$

لدينا:

$$\begin{aligned}
\forall (x,y)\in R^2 : (-2-x,2-y)\in E &\Leftrightarrow (-2-x+1)^2+4(2-y-1)^2=36\\
&\Leftrightarrow (-1-x)^2+(1-y)^2=36\\
&\Leftrightarrow (1+x)^2+(-1+y)^2=36\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in E
\end{aligned}$$

التمرين7: انتبه ! لقد تم تعديل المجموعة B !! معذرة...

نعتبر المجموعات التالية:

$A=\{(x,y)\in R^2 / x^2-y^2-10x+4y+21=0\}$
$B=\{(x,y)\in R^2 / x^2-y^2-6x+9=0\}$
$C=\{(x,y)\in R^2 / x=y+3\}$
$D=\{(x,y)\in R^2 / x+y=7\}$
$E=\{(x,y)\in R^2 / x+y=3\}$
$N=\{(3,0)\}$ و$M=\{(5,2)\}$

1. حدد المجموعات $A\cap B$و $C\cap D$و $C\cap E$ و $E\cap D$ و $C\cup D$ و $C\cup E$.

عناصر الأجوبة:

لاحظ أنه مهما تكن (x,y) من R^2 لدينا:

$x^2-y^2-10x+4y+21=(x-y-3)(x+y-7)$ و أن: $x^2-y^2-6x+9=(x-y-3)(x+y-3)$

إذن: $A=C\cup D$ و $B=C\cup E$.

لتحديد $C \cap D$ و $C \cap E$ و $E \cap D$ ، نقوم بحل النظمات في R^2 و هي: $\begin{cases} x = y+3 \\ x+y=7 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = y+3 \\ x+y=3 \end{cases}$ و $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=7 \end{cases}$ و

نجد $C \cap D = M$ و $C \cap E = N$ و $E \cap D = \phi$.

وهذه النتائج كافية لتحديد $A \cap B$ (دون الرجوع إلى التعابير المحددة للمجموعتين) إذ أن:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (C \cup D) \cap (C \cup E) \\ &= C \cup (D \cap E) \\ &= C \cup \phi \\ &= C \end{aligned}$$

2. بين أن $C_A^C = C_D^M$ و $C_B^C = C_E^N$.

لدينا:

$$\begin{aligned} C_D^M \cup C &= (D \cap \overline{M}) \cup C \\ &= (D \cup C) \cap (\overline{M} \cup C) \\ &= \mathrm{A} \cap R^2 \\ &= A \end{aligned}$$

لأن $M \subset C$ إذن $\overline{M} \cup M \subset \overline{M} \cup C$ أي $R^2 \subset \overline{M} \cup C$ و بالتالي $\overline{M} \cup C = R^2$.

و بما أن

$$\begin{aligned} C_D^M \cap C &= (D \cap \overline{M}) \cap C \\ &= (D \cap C) \cap \overline{M} \\ &= M \cap \overline{M} \\ &= \phi \end{aligned}$$

فان: $C_A^C = C_D^M$.

و بنفس الطريقة يمكن أن نبين أن $C_B^C = C_E^N$.

لاحظ أننا يمكننا استعمال الهندسة التحليلية للوصول إلى نفس النتائج: