التمرين 1:

بين أن المعادلة $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد النسبية.

التمرين 2:

ليكن x و y عددان حقيقيان بحيث $1 \le |y|$ و $|x| \le 0.5$.

بين أن $|4yx^2-x-y| \le 1.0625$.

التمرين 3:

احسب $a=1+4+7+10+13+...+634+637$.
(علما بأن في هذا المجموع، الفرق بين كل عددين متتاليين هو 3).

التمرين 4:

ليكن α حلا للمعادلة $x+\frac{1}{x}=3$ بحيث $\alpha \succ 1$.

بين أن $\alpha^{n+1}+\frac{1}{\alpha^{n+1}}=3(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n})-(\alpha^{n-1}+\frac{1}{\alpha^{n-1}})$

مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n.

استنتج أن :

$(\forall n \in IN) : \alpha^n+\frac{1}{\alpha^n} \in IN$

التمرين 5:

بين أن $(\forall n \in N) : 3^n < 3n^2+3n+2 \Rightarrow n \le 3$.

التمرين 6:

ليكن a و b و c أعداد جذرية بحيث $ab+bc+ca=1$.

بين أن $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \in Q$

التمرين 7:

لتكن العبارات p و q و r.

بين أن العبارتين $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]$ و $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)]$ متكافئتان.

التمرين 8:

حدد $B \setminus A$ إذا علمت أن $A \setminus B=\{3;6\}$ و $A \cap B=\{2;5\}$ و $A \cup B=\{1;2;3;4;5;6\}$.

التمرين 9:

حدد $(A \cup B) \cap C$ و $(A \setminus B) \cup C$ و $B \cup (C \setminus A)$ إذا كان $A=[-1;3[$ و $B=\{x \in]-25;25[/ |x-1|>5\}$ و $C=\{x \in]-30;18[/ |2x-3|>2\}$.

التمرين 10:

ليكن A جزء من المجموعة E و B جزء من المجموعة F.

1. بين أن $\overline{A\text{x}B}=(\overline{A}\text{x}F) \cup (E\text{x}\overline{B})$.
2. مثل هذه الوضعية بمخطط فان مناسب.
3. بين أن $(\overline{A}\text{x}F) \cap (E\text{x}\overline{B})=\phi \Leftrightarrow (A=E$ أو $B=F)$

التمرين 11:

استعن بمخطط فان لحل في $\mathcal{P}(E)$ النظمة: $\begin{cases} A \cup X=B \\ A \cap X=C \end{cases}$

بحيث $C \subset A \subset B \subset E$.

التمرين 12:

1. نعتبر تطبيقين f من E نحو F و g من F نحو E بحيث $gof=id_E$ و $fog=id_F$.
   بين أن f و g تقابلان و أن $g^{-1}=f$ و $f^{-1}=g$.
2. نعتبر f تقابلا من E نحو E.
   نعرف التركيب المضاعف ل f كما يلي: $f^0=id_E$ و $f^k=fof^{k-1}$ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم k.
   - بين أن $f^{n+m}=f^n o f^m$ مهما يكن العددان الصحيحان الطبيعيان n و m.
   - تظنن صيغة بسيطة للتركيب $(f^m)^n$ بحيث n و m عددان صحيحان طبيعيان.
   - نعتبر f تقابلا من E نحو E و k عددا صحيحا طبيعيا.
     بين أن f^k تقابل و أن تقابله العكسي $(f^k)^{-1}=(f^{-1})^k$.
     (لذلك نعرف $f^{-k}=(f^k)^{-1}=(f^{-1})^k$ لكل عدد صحيح طبيعي k)
   - نفترض أن تطبيقا f من E نحو E يحقق $f^n=id_E$ بحيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
     بين أن f تقابل و حدد تقابله العكسي f^{-1}.
3. نعتبر التطبيق:

$$f : IR \text{x} IR \to IR \text{x} IR$$
$$(x,y) \to (\frac{x+y\sqrt{3}}{2},\frac{y-x\sqrt{3}}{2})$$

   - حدد f^3 واستنتج أن f تقابل.
   - بين أنه، لكل k عدد نسبي، فان $f^k=f^r$ بحيث r أحد الأعداد 0 أو 1 أو 2.

التمرين 13:

لتكن E مجموعة غير فارغة.

لكل جزء A من E ، نعرف التطبيق:

$$\varphi_A : E \longrightarrow \{0;1\}$$
$$x \longrightarrow \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ إذا كان} \\ 0 & x \notin A \text{ إذا كان} \end{cases}$$

1. حدد φ_E و φ_ϕ.
2. بين أن :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$$

3. تحقق من أن: $\varphi_{\overline{A}} = \varphi_E - \varphi_A$.
4. لكل A و B جزئين من E ، أثبث أن:
   - $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$
   - $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A . \varphi_B$
   - $\varphi_{A\Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A . \varphi_B$
5. استنتج باستعمال التطبيقات المناسبة ، مثلا:
   - $(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C)$
   - $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C)$
   - $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta (B\Delta C)$

التمرين 14:

ليكن p و q و r ثلاثة أعداد حقيقية بحيث
$(\forall x \in [0;1]) : x + r \neq 0$

1. بين أن $r > 0$ أو $r < -1$.
2. نعتبر التطبيق:

$$f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{px+q}{x+r}$$

ما هو الشرط اللازم و الكافي على p و q و r لكي يكون التطبيق f تباينيا؟

3. ليكن التطبيق:

$$g : [0;1] \longrightarrow [0;1]$$
$$x \longmapsto \frac{px+q}{x+r}$$

ما هو الشرط اللازم و الكافي على p و q و r لكي يكون التطبيق g تقابليا؟