الرياضيات
الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي
2012 - 2013 Ω خ. الزبير يسف

الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$

ملخص الدرس

1 - الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$

a و b عددان حقيقيان

$a \leq b$ يعني أن $a - b \leq 0$
$a \geq b$ يعني أن $a - b \geq 0$

- $a > 0$ و $b > 0$, قارن $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

- $n \in \mathbb{N}^*$, قارن $\frac{2n}{2n+1}$ و $\frac{2n-1}{2n}$

2 - الترتيب و العمليات

الترتيب و الجمع

إذا كان $a \leq b$
فإن :
$a + c \leq b + c$

إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$
فإن :
$a + c \leq b + d$

الترتيب و الضرب

إذا كان : $a \leq b$ و $k \geq 0$
فإن : $ka \leq kb$

إذا كان : $a \leq b$ و $k \leq 0$
فإن : $ka \geq kb$

إذا كان : $ka \leq kb$ و $k \geq 0$
فإن : $a \leq b$

إذا كان : $ka \leq kb$ و $k \leq 0$
فإن : $a \geq b$

الترتيب و المربع

إذا كان : a و b موجبان و $a \leq b$
فإن : $a^2 \leq b^2$

إذا كان : a و b سالبان و $a \leq b$
فإن : $a^2 \geq b^2$

إذا كان : a و b موجبان و $a^2 \leq b^2$
فإن : $a \leq b$

إذا كان : a و b سالبان و $a^2 \leq b^2$
فإن : $a \geq b$

الترتيب و المقلوب

الترتيب و الجذر مربع

$0 < a \leq b$ يعني $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

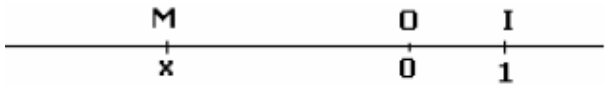
$a \leq b < 0$ يعني $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$

إذا كان : $0 < a \leq b$ فإن : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

3 - القيمة المطلقة

على محور ممنظم, x هو أفصول نقطة M . القيمة المطلقة لـ x هي المسافة بين أصل المعلم و النقطة M و يرمز لها بـ : $|x|$ أي : $OM = |x|$

إذا كان $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$



إذا كان $x \leq 0$ فإن : $|x| = -x$

خاصيات القيمة المطلقة

❶ $|x - y| = |y - x|$

❷ $|xy| = |x||y|$

❸ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

❹ $|x + y| \leq |x| + |y|$

❺ $|x - y| \geq |x| - |y|$

❻ $|x| = |y|$ تعني : $x = y$ أو $x = -y$

4 - مجالات $\mathbb{R}$

a و b عددان حقيقيان :

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق :	الترميز	التمثيل على مستقيم عددي
$a \leq x \leq b$	$[a,b]$ أو $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	———
$a < x < b$	$]a,b[$ أو $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	———
$a < x \leq b$	$]a,b]$ أو $\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	———
$a \leq x < b$	$[a,b[$ أو $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	———
$x \leq a$	$]-\infty,a]$ أو $\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	———
$x < a$	$]-\infty,a[$ أو $\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	———
$x \geq a$	$[a,+\infty[$ أو $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	———
$x > a$	$]a,+\infty[$ أو $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	———

5 - المجالات و القيمة المطلقة

r عدد حقيقي موجب قطعا

الكتابة باستعمال القيمة المطلقة	الكتابة باستعمال المجالات	التمثيل على مستقيم عددي
$\|x\| \le r$	$x \in [-r, r]$	———
$\|x\| \ge r$	$x \in]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[$	———
$\|x\| < r$	$x \in]-r, r[$	———
$\|x\| > r$	$x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$	———
$\|x-a\| \le r$	$x \in [a-r, a+r]$	———
$\|x-a\| \ge r$	$x \in]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$	———
$\|x-a\| < r$	$x \in]a-r, a+r[$	———
$\|x-a\| > r$	$x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$	———

6 - التأطير

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$.
الكتابة (المتفاوتة المزدوجة) : $a \le x \le b$ تسمى تأطيرا للعدد x سعته $b-a$
المتفاوتات المزدوجة : $a \le x \le b$ و $a \le x \le a$ و $a \le x \le b$ هي كذلك تأطير لـ x سعته : $b-a$.

7 - التأطير و العمليات :

تأطير مجموع

إذا كان : $a \le x \le b$
فإن : $a+c \le x+c \le b+c$

إذا كان : $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$
فإن : $a+c \le x+y \le b+d$

تأطير فرق

إذا كان : $a \le x \le b$
فإن : $a-c \le x-c \le b-c$

إذا كان : $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$
فإن : $a-d \le x-y \le b-c$

تأطير جداء

تأطير مقلوب

إذا كان : $a \le x \le b$ و $k \ge 0$

فإن : $ka \le kx \le kb$

إذا كان : $a \le x \le b$ و $k \le 0$

فإن : $kb \le kx \le ka$

إذا كان : $0 < a \le x \le b$

فإن : $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$

إذا كان : $0 \le a \le x \le b$ و $0 \le c \le y \le d$

فإن : $ac \le xy \le bd$

تأطير خارج

إذا كان : $0 < a \le x \le b$ و $0 \le c \le y \le d$

فإن : $\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$

8 - التقريبات

تقريب بإفراط أو بتفريط

ليكن x أو $a \le x \le b$ أو $a \le x \le b$ أو $a \le x \le b$

أو $a \le x \le b$ تأطيرا للعدد x سعته $b-a$.

- العدد a يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بتفريط
- العدد b يسمى تقريبا للعدد x إلى $b-a$ بإفراط

قيمة مقربة

ليكن x عددا حقيقيا و r عددا حقيقيا موجبا قطعا ($r > 0$)

كل عدد حقيقي a يحقق إحدى العلاقتين :

$|x-a| \le r$ أو $|x-a| < r$ يسمى تقريبا (أو قيمة مقربة)

للعدد x بالدقة r

التقريبات العشرية

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $N \times 10^{-p} \le x < (N+1) \times 10^{-p}$ مع $p \in \mathbb{N}$ و $N \in \mathbb{Z}$

- العدد $N \times 10^{-p}$ يسمى التقريب العشري للعدد x إلى 10^{-p} بتفريط
- العدد $(N+1) \times 10^{-p}$ يسمى التقريب العشري للعدد x إلى 10^{-p} بإفراط