

الحساب المثلثي

ملخص الدرس

وحدات قياس الزوايا

(C) دائرة مركزها O و شعاعها 1. I و M نقطتان منها. قياس الزاوية \widehat{IOM} بالراديان هو طول القوس IM	الراديان
قياس زاوية مستقيمة بالـ الغراد هو 200 غراد	الغراد

إذا كان x : قياس زاوية هندسية \widehat{IOM} بالدرجة
و y قياسها بالراديان
و z قياسها بالغراد
فإن : $\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$

الدائرة المثلثية

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})
الدائرة المثلثية هي دائرة : - مركزها O أصل المعلم
- شعاعها 1
- مزودة بنقطة أصل I
- موجهة توجيها موجبا

الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

(C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. وليكن x عددا حقيقيا

- إذا كان $x \geq 0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون x هو قياس \widehat{IOM} بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى الموجب على (C)
- إذا كان $x < 0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون $-x$ هو قياس \widehat{IOM} بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى السالب على (C)

- العدد x يسمى في الحالتين **أفصولا منحنيا** للنقطة M على (C) و مكتب $M(x)$

- إذا كان $x \in]-\pi, \pi]$ نقول إن x هو **الأفصول المنحني الرئيسي** للنقطة M و هو وحيد.

- الأعداد $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هي أفاصيل منحنية للنقطة M على (C), أي أن $M(x)$ و $M(x + 2k\pi)$ منطبقان

الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين - الزاوية الموجهة لمتجهتين

- ليكن $[Ox]$ و $[Oy]$ نصفي مستقيمين.
الزوج $([Ox], [Oy])$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين و نرسم لها بالرمز (Ox, Oy)
الزوج $([Oy], [Ox])$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين و نرسم لها بالرمز (Oy, Ox)
- دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I حيث $I \in [Ox]$ و M نقطة تقاطع $[Oy]$ و (C)
و ليكن x أفضولا منحنيا للنقطة M .
العدد الحقيقي x يسمى قياسا للزاوية الموجهة (Ox, Oy) نرسم له بالرمز $(\overline{Ox, Oy})$
و نكتب : $(\overline{Ox, Oy}) = x$. لدينا كذلك $(\overline{Ox, Oy}) = x + 2k\pi$ (لأن $x + 2k\pi$ أيضا
أفضول منحنيا للنقطة M)
- \vec{u} متجهة موجهة لـ $[Ox]$ و \vec{v} متجهة موجهة لـ $[Oy]$
الزاوية الموجهة للمتجهتين المحددة بالزوج (\vec{u}, \vec{v}) هي الزاوية الموجهة (Ox, Oy) و
نرسم لها بالرمز (\vec{u}, \vec{v})
و لدينا : $(\overline{Ox, Oy}) = (\vec{u}, \vec{v})$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } (\vec{u}, \vec{u}) &= 2k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ (\vec{u}, \vec{v}) &= -(\vec{v}, \vec{u}) + 2k\pi \\ (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \quad (\text{علاقة شال}) \end{aligned}$$

النسب المثلثية لعدد حقيقي

$(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $(\overline{OI}, \overline{OJ}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث I وإصلها O و (C) دائرة مثلثية مركزها O و معلم متعامد ممنظم و $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$

ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصلها المنحنية هو x

- أفصول النقطة M يسمى **جيب تمام** x و نرسم له بـ: $\cos x$
- أرتوب النقطة M يسمى **جيب** x و نرسم له بـ: $\sin x$

$M(\cos x; \sin x)$

ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $(k \in \mathbb{Z})$ و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصلها المنحنية هو x

ليكن (Δ) المماس للدائرة (C) عند النقطة I و T تقاطع (OM) و (Δ)

- أفصول النقطة T على (Δ) يسمى **ظل** x و نرسم له بـ: $\tan x$
- $|\tan x| = IT$
- نعرف كذلك ظل عدد حقيقي x بـ: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

جدول القيم الاعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

خاصيات

لكل x من \mathbb{R} لدينا :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

لكل x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ لدينا :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

لكل x من $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ لدينا :

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$-\tan x = \tan(-x)$$

لكل x من \mathbb{R} و k من \mathbb{Z} لدينا :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos x = \cos(-x)$$

$$-\sin x = \sin(-x)$$

علاقات مثلثية

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

المعادلات المثلثية

ليكن a عددا حقيقيا

$$\tan x = a$$

يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

حيث $\tan \alpha = a$

و $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin x = a$$

إذا كان $a \notin [-1, 1]$
فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R} (S = \emptyset)$

إذا كان $a = 1$

فإن : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

إذا كان $a = -1$

فإن : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

إذا كان $a \in]-1, 1[$

فإنه يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$\sin \alpha = a$ ولدينا :

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cos x = a$$

إذا كان $a \notin [-1, 1]$
فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R} (S = \emptyset)$

إذا كان $a = 1$

فإن : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a = -1$

فإن : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

إذا كان $a \in]-1, 1[$

فإنه يوجد عدد α وحيد من $]0, \pi[$ حيث $\cos \alpha = a$ ولدينا :

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

المترجمات المثلثية

(انظر الأمثلة و التمارين)